Тема уроков: Произведение многочленов

Многочлен – сумма одночленов.

Любой многочлен можно разложить на два множителя, один из которых это число, не равное нулю.

Произведение нулевого многочлена на любой многочлен есть нулевой многочлен.

Чтобы найти произведение многочленов, необходимо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена, а полученные одночлены сложить.

Найдём многочлен, равный произведению одночлена и многочлена 4х и 17 + с.

Решение:

$$4x \cdot (17 + c) = 68 + 4cx$$

Это мы научились выполнять на предыдущем занятии.

Сегодня мы будем находить произведение многочленов.

Для начала выясним, что такое произведение многочленов.

Оказывается, произведение многочленов равно многочлену, членами которого являются произведения каждого члена другого многочлена. Т. е. чтобы найти произведение многочленов, необходимо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена, а полученные одночлены сложить.

Например, так выглядит произведение многочленов а + с и многочлена х + у.

Найдите произведение многочленов а + с и х + у.

Решение:

$$(a + c)(x + y) = ax + cx + ay + cy$$

Найдём произведение этих же многочленов, умножив первый многочлен на второй.

$$(a + c)(x + y) = ax + ay + cx + cy$$

Видно, что произведение двух многочленов не зависит от того, какой из многочленов будем мы умножать.

Если поменяем полученные равенства местами, то получим разложение многочлена на множители.

$ax + ay + cx + cy = (a + c)(x + y)$

Введём определение разложения многочлена на множители.

Разложением многочлена на множители называют его преобразование в произведение двух или нескольких многочленов.

Оказывается, любой многочлен можно разложить на два множителя, один из которых - это число, не равное нулю.

Пример. Разложите многочлен на множители

$$c - x = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}c - \frac{1}{5}x\right)$$

Для этого возьмём любое число, не равное нулю, например, пять, вынесем его за скобки. Получается разложение на множители, один из которых имеет нулевую степень (это число пять), а другой – ту же степень, что и исходный многочлен (степень многочлена один).

Стоит отметить, что, если при умножении многочленов, один из них не представлен (или записан) в нестандартном виде, то его сначала можно привести к стандартному виду, а затем выполнить вычисления. В противном случае вычисления могут быть более сложными.

Пример.

Найдём двумя способами произведение многочленов $(2a – 4c + a)(x + 3y +x)$.

Первый способ: сначала приведём к стандартному виду тот многочлен, который записан не в стандартном виде, и затем выполним умножение.

Второй способ: будем выполнять умножение сразу, а затем приводить полученный многочлен к стандартному виду.

1) $(\mathbf{2a} - 4c + \mathbf{a})(\ \mathbf{x} + 3y + \mathbf{x}) = (3a - 4c)(2x + 3y) = 3a \cdot 2x + 3a \cdot 3y + (-4)c \cdot 2x + (-4)c \cdot 3y = 6ax + 9ay - 8cx - 12cy.$

2) $(2a - 4c + a)(\ x+3y +x) = 2ax+ 2a\cdot 3y +2ax +(-4)cx+ (-4)c\cdot 3y+ (-4)cx +ax+a\cdot 3y + ax = \mathbf{2ax} + 6ay + \mathbf{2ax} - 4cx - 12cy - 4cx + \mathbf{ax} + 3ay + \mathbf{ax} = 6ax + 9ay - 8cx - 12cy.$

Запись первым способом короче, но результат вычислений одинаковый.
Выполним ещё одно задание.
Найдём произведение многочленов.

$(c - c)(2a + 4ac + 3x)$

Для этого первый многочлен приведём к стандартному виду, а затем выполним вычисления.

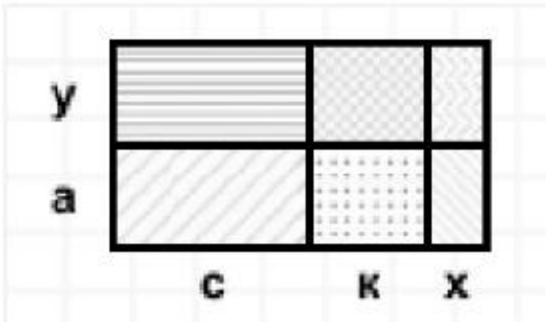
$(c - c)(2a + 4ac + 3x) = 0\cdot(2a - 4ac - 3x) = 0 \cdot 2a + 0 \cdot 4ac + 0 \cdot 3x = 0 + 0 + 0 = 0$

Данное выражение будет равно нулю.
Следовательно, произведение нулевого многочлена на любой многочлен есть нулевой многочлен.

Докажем равенство.

Пользуясь рисунком, докажите, что для $a > 0$; $c > 0$; $k > 0$; $x > 0$; $y > 0$

$(a + y)(c + k + x) = ac + ak + ax + cy + ky + xy$



Доказательство: для доказательства данного равенства, воспользуемся формулой площади прямоугольника. $S = ab$, где a, b – стороны прямоугольника.
Для этого на рисунке выделим 6 прямоугольников (первый – со сторонами a и c, второй – со сторонами y и c, третий – со сторонами a и k, четвёртый – со сторонами a и x, пятый – со сторонами y и k, шестой – со сторонами y и x).
Чтобы найти площадь прямоугольника, состоящего из шести других, можно найти площадь каждого из шести прямоугольников, а затем сложить все найденные площади.
Или сразу найти площадь прямоугольника, состоящего из шести других, как произведение двух его смежных сторон $(a + y)$ и $(c + k + x)$.

$S_2 = (a + y)(c + k + x)$

$S_1 = ac + ak + ax + cy + ky + xy$

$S_1 = S_2$, следовательно: $(a + y)(c + k + x) = ac + ak + ax + cy + ky + xy$.

Что и требовалось доказать.

Разбор заданий тренировочного модуля.

1. Упростите выражение.

$(7aaaaa + 3x)\ (7a^5 – 3x)$

Решение:

Для решения задания сначала приведём многочлен в скобках к стандартному виду, а затем найдём произведение многочленов.

$(7a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a + 3x) \cdot (7a^5 – 3x) = (7a^5 + 3x) \cdot (7a^5 – 3x) = 7a^5 \cdot 7a^5 – 7a^5 \cdot 3x + 3x \cdot 7a^5 – 3x \cdot 3x = 49a^{10} – \mathbf{21a^5x} + \mathbf{21a^5x} – 9x^2 = 49a^{10} –9x^2$

Ответ: $(7a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a + 3x)\ (7a^5 – 3x) = 49a^{10} – 9x^2$

2. Какой одночлен нужно вписать вместо знака *, чтобы выполнялось равенство:

$(4a + *) \cdot (a^2 – ay) = 4a^3 – a^2y – 3ay^2$

Варианты ответов:

$3a$

y^2

$3y$

Решение:

При выполнении задания, подставим вместо * все одночлены и найдём произведение многочленов.

$(4a + 3a)(a^2 – ay) = 7a(a^2 – ay) = 7a^3 – 7a^2y$. Это выражение не соответствует условию.

$(4a + y^2)(a^2 – ay) = 4a^3 + a^2y^2 – 4a^2y – ay^2$. Это выражение не соответствует условию.

$(4a + 3y)(a^2 – ay) = 4a^3 – 4a^2y + 3a^2y – 3ay^2 = 4a^3–a^2y – 3ay^2$.

Ответ:

Итак, сегодня мы получили представление о том, как находить произведение многочленов, раскрывать скобки, выполнять разложение многочленов на множители.
Домашнее задание: упражнение 693